Matematyka 2 – kolokwium zaliczeniowe, termin I, grupa A

Zad.1 (2 pkt) Zbudować najlepszą ciągłą aproksymację postaci $p(x)=a_1+a_2x$ dla funkcji $f(x)=e^x$ określonej w przedziale $x\in\left[0 \quad 2\right]$. Obliczyć: średni całkowy błąd takiej aproksymacji oraz błąd lokalny dla środka przedziału. Wszystkie całki oraz rozwiązanie układu równań muszą być wyznaczone za pomocą obliczeń ręcznych.

- obliczenie współczynników macierzy A – 0.5 pkt,

- obliczenie współczynników wektora B – 0.5 pkt,

- poprawne rozwiązanie układu równań – 0.5 pkt,

- obliczenie błędów aproksymacji – 0.5 pkt.

Najczęstsze błędy: niepoprawne całkowanie jednomianów (!) w macierzy A i funkcji w wektorze B, niepoprawne obliczanie błędu średniego (powinna być całka po przedziale, a nie suma kwadratów błędów w punktach), a także zmiana tematu zadania na aproksymację dyskretną (skąd nagle 3 węzły?) – co, ze względu na zmianę tematu zadania, oceniałem na 0 pkt.

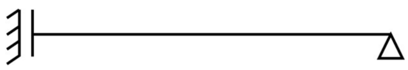
Zad.2 (3 pkt) Dla funkcji $f(z)=e^z$ i przedziału $z\in\left[-1 \quad 2\right]$ znaleźć optymalny rozkład 4 węzłów i wartości węzłowych, wykorzystując własności wielomianów Czebyszewa. Następne dla tych danych zastosować najlepszą liniową aproksymację Czebyszewa postaci $p(z)=a_1T_1\left(z\right)+a_2T_2\left(z\right)$ i za jej pomocą obliczyć lokalny błąd takiej aproksymacji w węzłach oraz dla $z=0$.

- wyznaczenie tabelki z X, Z i Y – 1 pkt,

- zapisanie układu A*a = B, oraz C*a = D i jego rozwiązanie – 1,5 pkt,

- obliczenie błędów aproksymacji – 0.5 pkt.

Najczęstsze błędy: zamiast 4 węzłów, 2 lub 3, albo zamiast węzłów jako miejsc zerowych Czebyszewa – węzły regularne (zmiana tematu zadania – automatyczne 0 pkt). Dalej: mamy 4 węzły i dwie funkcje bazowe – co trzeba zrobić? Zbudować macierz A o wymiarze 4x2 (pierwsza kolumna to jedynki, druga – X, a nie Z), oraz wektor B = Y transponowane. Większość z Państwa albo nie wiedziała, co dalej robić z różną liczbą węzłów i funkcji bazowych, albo budowała macierz 2 x 2 albo 4 x4 – nawet ktoś próbował rozwiązywać taki układ…

Zad.3 (3 pkt) Dane jest równanie hiperboliczne $u_{xx}-u_{tt}=0$ opisujące drgania wymuszone belki  o długości $L=2$. Dla $t=0$ przyjąć: zerowe przemieszczenie oraz prędkość początkową zgodną z funkcją $v_0\left(x\right)=\cos\left(0.25\pi x\right)$. Znaleźć postać drgań na dwóch kolejnych nieznanych poziomach czasowych (dla $t=\Delta t$ i $t=2\Delta t$). Przyjąć siatkę regularną, złożoną z 5 węzłów na każdym poziomie czasowym, oraz krok czasowy, będący 1/4 kroku krytycznego dla schematu jawnego. Wskazówka: wprowadzić węzeł fikcyjny w odległości $x=-\Delta x$ od lewego końca belki i zapisać z jego pomocą operator centralny na pierwszą pochodną w tym punkcie.

- obliczenie dx, dt, lambda, wyznaczenie schematu oraz wartości węzłowych na znanym poziomie czasowym (dla t = 0) – 1 pkt,

- wyznaczenie funkcji na pierwszym poziomie czasowym dla t = dt (z udziałem węzłów fikcyjnych na poziomie t = - dt i węzła fikcyjnego x = -dx) – 1 pkt,

- wyznaczenie funkcji na drugim poziomie czasowym dla t = 2dt (z udziałem węzła fikcyjnego x = -dx) – 1 pkt.

Najczęstsze błędy: zaczynały się już od przecież prostego obliczenia dx, dt_kryt, dt i lambda – przez stosowanie złych wzorów (np. dla równań parabolicznych) lub przez błędne skracanie ułamków, naliczyłem aż 10 różnych wariantów lambda… **Największa zgroza: ktoś przyjął beta ujemne… Osoba, która tak postąpiła (i oparła dalsze obliczenia na tej wartości), otrzymuje 0 pkt z kolokwium i 2.0 z przedmiotu, bez możliwości poprawy: chyba, że znajdzie (lub odkryje: czas do końca sesji wrześniowej) materiał inżynierski, dla którego stosunek gęstości masy i modułu Younga (bo to jest właśnie beta) jest ujemny.** Dalej: część z Państwa pomyliła prędkość początkową z przemieszczeniem i tak zamiast prościutkich zerowych rozwiązań dla t = 0, wyszły niezerowe... Do tego pomyłki z położeniem węzłów, dla wyznaczenia prędkości w węźle leżącym na podporze lewej, x wynosi 0, a nie 0.5. Do tego całe mnóstwo pomyłek obliczeniowych. Jedna osoba rozwiązała problem paraboliczny, za co oczywiście otrzymała 0 pkt.

Zad.4 (2 pkt) Dokonać maksymalizacji funkcji $f\left(x\right)=\left(x+2\right)\left(2-x\right)$ w przedziale [-2,2] za pomocą algorytmów genetycznych. Przyjąć 4 osobniki, złożone z 5 bitów każdy. Populację startową dobrać losowo, podobnie jak wyniki krzyżowania ($p_k=1$) i mutacji ($p_m=0.3$). Przeprowadzić pełny cykl genetyczny (selekcja, krzyżowanie, mutacja). Na koniec wyznaczyć aktualne najlepsze rozwiązanie oraz wartość funkcji f dla tego rozwiązania.

- przyjęcie populacji startowej, przejście binarne na dziesiętne, wyznaczenie wartości funkcji celu i prawdopodobieństw selekcji oraz jej rezultatu (na kole) – 1 pkt,
- przeprowadzenie krzyżowania i mutacji – 0,5 pkt,
- wyznaczenie aktualnego rozwiązania optymalnego – 0,5 pkt.

To zadanie poszło najlepiej. Jednakże zdarzały się osoby, które niepoprawnie obliczały x i f(x), w porywach wartości f(x) wynosiły po kilka milionów… Do tego prosiłem, by na końcu wyznaczyć rozwiązanie optymalne – jako, iż część z Państwa tego nie zrobiła, albo zrobiła źle (np. wskazując taki x, dla którego f(x) jest najbliższe zeru), jest obawa, iż nie wszyscy wiedzą, jakie zadanie jest w ten sposób rozwiązywane.