Interpolacja Lagrange'a

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i^n(x) f_i = L_0^n(x) f_0 + L_1^n(x) f_1 + \cdots + L_n^n(x) f_n$$

$$\text{gdzie } L_i^n(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

Aproksymacja - Zapis indeksowy

błąd średnio kwadratowy

$$\varepsilon = \sum_{i=0}^{n} \left(\psi(x_i) - f_i\right)^2 \qquad \text{gdzie } \psi(x) = \sum_{i=0}^{m} \phi_i(x) a_i$$

Minimalizacja błędu średnio kwadratowego – układ równań

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_k} = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{i=0}^{n} \Big(\phi_j(x_i)\phi_k(x_i)\Big) a_j \right) - \sum_{i=0}^{n} \Big(f_i \phi_k(x_i)\Big) = 0, \quad \text{dla } k = 0, 1, \ldots, m$$

Aproksymacja - Zapis macierzowy

błąd średnio kwadratowy

$$\varepsilon = \Big(\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})\mathbf{a} - \mathbf{f}\Big)^{\mathrm{T}} \Big(\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})\mathbf{a} - \mathbf{f}\Big) \qquad \text{gdzie } \psi(x) = \Phi(x)\mathbf{a}, \quad \Phi(x) = [\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)]$$

układ równań

$$\Big(\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})\Big)^{\mathrm{T}} \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})\mathbf{a} = \Big(\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})\Big)^{\mathrm{T}} \mathbf{f} \qquad \text{gdzie } \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \ldots & \phi_m(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \ldots & \phi_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \ldots & \phi_m(x_n) \end{bmatrix}$$

Własności funkcji kształtu

$$N_i(x_i, y_i) = 1, \quad N_i(x_j, y_j) = 0 \qquad \text{dla } i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad \text{gdzie } n - \text{liczba węzłów}$$

Funkcje bazowe w ES trójwęzłowym $\mathbf{\Phi} = [1,\ x,\ y]$ a w czterowęzłowym $\mathbf{\Phi} = [1,\ x,\ y,\ xy]$

Przemieszczenia PSO

$$\mathbf{u}^e(x,y) = \mathbf{N}^e(x,y)\bar{\mathbf{d}}^e \qquad \text{gdzie } \mathbf{u}^e(x,y) = \{u^e(x,y), v^e(x,y)\}, \quad \mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & \cdots & N_n^e & 0 \\ 0 & N_1^e & \cdots & 0 & N_n^e \end{bmatrix}$$

Odkształcenia PSO: $\varepsilon_z = 0$

$$\mathbf{e}^e(x,y) = \mathbf{L}\mathbf{u}^e(x,y) = \mathbf{B}^e(x,y)\bar{\mathbf{d}}^e \qquad \text{gdzie } \mathbf{B}^e(x,y) = \mathbf{L}\mathbf{N}^e(x,y)$$

$$\mathbf{e}^e(x,y) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^e(x,y) \\ \varepsilon_y^e(x,y) \\ \gamma_{xy}^e(x,y) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Naprężenia PSO: $\sigma_z^e = \nu(\sigma_x^e + \sigma_y^e)$

$$\mathbf{s}^e(x,y) = \mathbf{D}\mathbf{e}^e(x,y) \qquad \text{gdzie } \mathbf{s}^e(x,y) = \begin{bmatrix} \sigma_x^e(x,y) \\ \sigma_y^e(x,y) \\ \tau_{xy}^e(x,y) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Macierz sztywności i wektor sił brzegowych (zastępniki) PSO

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \int_{A^e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\,\mathrm{d}A^e, \qquad \bar{\mathbf{f}}^e_{\mathrm{b}} = \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^{e\mathrm{T}}\mathbf{t}^e\,\mathrm{d}\Gamma^e \qquad \text{gdzie } \mathbf{t}^e = \begin{bmatrix} t^e_x \\ t^e_y \end{bmatrix}$$

Funkcje bazowe w ES trójwęzłowym $\mathbf{\Phi} = [1,\ x,\ y]$ a w czterowęzłowym $\mathbf{\Phi} = [1,\ x,\ y,\ xy]$

Temperatura

$$T^e(x,y) = \mathbf{N}^e(x,y)\mathbf{\Theta}^e \qquad \text{gdzie } \mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} N^e_1 & \cdots & N^e_n \end{bmatrix}$$

Gęstość strumienia ciepła

$$\boldsymbol{q}^e(x,y) = -\mathbf{D}\nabla T^e(x,y) = -\mathbf{D}\mathbf{B}^e(x,y)\mathbf{\Theta}^e \qquad \text{gdzie } \mathbf{B}^e(x,y) = \nabla\mathbf{N}^e(x,y)$$

$$\mathbf{q}^e(x,y) = \begin{bmatrix} q_x(x,y) \\ q_y(x,y) \end{bmatrix}, \qquad \nabla = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}$$

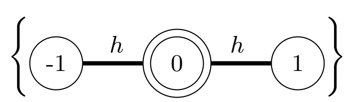
Macierz przewodności i wektor gęstości strumienia na brzegu (zastępniki)

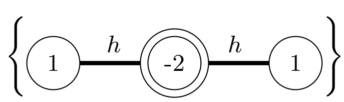
$$\mathbf{k}^e = \int_{A^e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}h^e\,\mathrm{d}A^e, \qquad \mathbf{f}^e_{\mathrm{b}} = -\int_{\Gamma^e} \left(\mathbf{N}^e(x,y)\right)^{\mathrm{T}} q_n h^e\,\mathrm{d}\Gamma^e$$

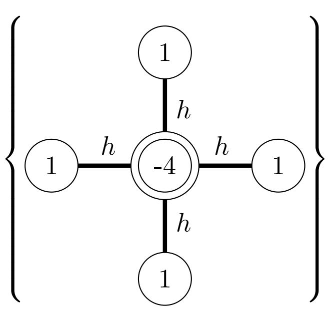
Rozwinięcie w szereg Taylora

- dla 1D: $u_j = u_i + hu'_i + \frac{1}{2}h^2u''_i + \frac{1}{6}h^3u'''_i + \ldots + \frac{1}{n!}h^nu^{(n)}_i + \ldots \qquad$ gdzie $h = x_j - x_i$
- dla 2D: $u_{lm} = u_{ij} + h\dfrac{\partial u_{ij}}{\partial x} + k\dfrac{\partial u_{ij}}{\partial y} + \dfrac{1}{2}h^2\dfrac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x^2} + hk\dfrac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x\partial y} + \dfrac{1}{2}k^2\dfrac{\partial^2 u_{ij}}{\partial y^2} + \ldots + \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}h + \dfrac{\partial}{\partial y}k\right)^n u_{ij} + \ldots$ gdzie $h = x_l - x_i, k = y_m - y_j$

Wzory różnicowe - klasyczny MRS

- Pierwsza pochodna centralna 

$\cdot\ \dfrac{1}{2h}$
- Druga pochodna 

$\cdot\ \dfrac{1}{h^2}$
- Laplasjan 

$\cdot\ \dfrac{1}{h^2}$

Aproksymacja MWLS 1D

- Aproksymacja lokalna
  $u(x,x_0) = \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mathcal{D}}u \quad$ gdzie $\mathbf{p} = \left[1,\ h,\ \ldots,\ \frac{h^p}{p!}\right]^{\mathrm{T}}$ i $\boldsymbol{\mathcal{D}}u = \left[u_0,\ u_0',\ \ldots,\ u_0^{(p)}\right]^{\mathrm{T}}$
- Ważona funkcja błędu
  $J = (\mathbf{P}\,\boldsymbol{\mathcal{D}}u - \mathbf{q})^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^2(\mathbf{P}\,\boldsymbol{\mathcal{D}}u - \mathbf{q}), \qquad \mathbf{q}$ – wektor stopni swobody
  $\mathbf{P} = \left[\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(h_1),\ \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(h_2),\ \ldots,\ \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(h_n)\right]^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{W} = \mathrm{diag}\left[\omega(x-x_0),\ \ldots,\ \omega(x-x_n)\right]$
- Funkcja wagowa
  $\omega(x-x_i) = \dfrac{1}{d_i^{p+1-s} + \varepsilon} \quad$ gdzie $d_i = |x - x_i|, \quad i = 1,\ldots,n$
- Minimalizacja funkcji błędu
  $\dfrac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\mathcal{D}}u} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^2(\mathbf{P}\,\boldsymbol{\mathcal{D}}u - \mathbf{q}) = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{D}}u = \mathbf{M}\mathbf{q} \quad$ gdzie $\mathbf{M} = \left(\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^2\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{P}\mathbf{W}^2$

Macierz transformacji ($c = \cos(\alpha^e)$ i $s = \sin(\alpha^e)$) oraz macierz sztywności dla elementu ramowego

$$\mathbf{T}^e = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{k}^e = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}^e$$

Macierz wstępnych naprężeń oraz macierz mas dla elementu ramowego

$$\mathbf{k}^e_\sigma = \frac{N^e(x)}{30l^e}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3l & 0 & -36 & 3l \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & -3l & -l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3l & 0 & 36 & -3l \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix}^e, \qquad \mathbf{m}^e = \frac{\mu l}{420}\begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 156 & -22l \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}^e$$

Funkcje kształtu dla czterowęzłowego elementu oraz macierz Jacobiego odwzorowania

$$\begin{aligned} N_i(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_j(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_k(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_l(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned}, \qquad J = \left|\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}\right|$$

Sformułowanie silne - model lokalny

$$Ay''(x) + C(x)y(x) = D(x)$$

+ (przykładowe) warunki brzegowe

- $y(x_a) = \widehat{a}$ – podstawowy warunek brzegowy (Dirichleta)
- $y'(x_b) = \widehat{b}$ – naturalny warunek brzegowy (Neumanna)

Sformułowanie słabe – model globalny ($\forall w \neq 0$)

$$\int_{x_a}^{x_b} w(x)\left(Ay^{h''}(x) + C(x)y^h(x) - D(x)\right)\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_{x_a}^{x_b} w(x)Ay^{h''}(x)\mathrm{d}x + \int_{x_a}^{x_b} w(x)C(x)y^h(x)\mathrm{d}x - \int_{x_a}^{x_b} w(x)D(x)\mathrm{d}x = 0$$

$$w(x)Ay^{h'}(x)\Big|_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} w'(x)Ay^{h'}(x)\mathrm{d}x + \int_{x_a}^{x_b} w(x)C(x)y^h(x)\mathrm{d}x - \int_{x_a}^{x_b} w(x)D(x)\mathrm{d}x = 0$$

$$w(x_b)A\overbrace{y^{h'}(x_b)}^{\widehat{b}} - w(x_a)Ay^{h'}(x_a) - \int_{x_a}^{x_b} w'(x)Ay^{h'}(x)\mathrm{d}x + \int_{x_a}^{x_b} w(x)C(x)y^h(x)\mathrm{d}x - \int_{x_a}^{x_b} w(x)D(x)\mathrm{d}x = 0$$

$$w(x_b)A\widehat{b} \quad -w(x_a)Ay^{h'}(x_a) - \int_{x_a}^{x_b} w'(x)Ay^{h'}(x)\mathrm{d}x + \int_{x_a}^{x_b} w(x)C(x)y^h(x)\mathrm{d}x \quad - \int_{x_a}^{x_b} w(x)D(x)\mathrm{d}x = 0$$

$$L(y^h, w) \; -l(w) = 0$$

+ podstawowy warunek brzegowy

- $y(x_a) = \widehat{a}$

Estymator błędu

$$e^e(x^e) = |y^e_{h,p}(x^e) - y^e_{por}(x^e)|$$

gdzie e – element, $y^e_{h,p}$ – rozwiązanie MES, h – moduł siatki, p – rząd aproksymacji y^e_{por} – rozwiązanie ścisłe lub odniesienia.

Wskaźnik (indykator) błędu

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{|l|}\sum_e L(e,e)}$$

Liniowe funkcje kształtu 1D

$$\mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x^e}{l^e} & \frac{x^e}{l^e} \end{bmatrix}$$

Kwadratowe hierarchiczne funkcje kształtu 1D

$$\mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x^e}{l^e} & \frac{x^e}{l^e} & x^e(x^e - l^e) \end{bmatrix}$$