

## Interpolacja Lagrange'a

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i^n(x) f_i = L_0^n(x) f_0 + L_1^n(x) f_1 + \dots + L_n^n(x) f_n$$

$$\text{gdzie } L_i^n(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

## Aproksymacja - Zapis indeksowy

błąd średnio kwadratowy

$$\varepsilon = \sum_{i=0}^n (\psi(x_i) - f_i)^2 \quad \text{gdzie } \psi(x) = \sum_{i=0}^m \phi_i(x) a_i$$

Minimalizacja błędu średnio kwadratowego – układ równań

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_k} = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^m \left( \sum_{i=0}^n (\phi_j(x_i) \phi_k(x_i)) a_j \right) - \sum_{i=0}^n (f_i \phi_k(x_i)) = 0, \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, m$$

## Aproksymacja - Zapis macierzowy

błąd średnio kwadratowy

$$\varepsilon = (\Phi(\mathbf{x})\mathbf{a} - \mathbf{f})^T (\Phi(\mathbf{x})\mathbf{a} - \mathbf{f}) \quad \text{gdzie } \psi(x) = \Phi(x)\mathbf{a}, \quad \Phi(x) = [\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)]$$

układ równań

$$(\Phi(\mathbf{x}))^T \Phi(\mathbf{x})\mathbf{a} = (\Phi(\mathbf{x}))^T \mathbf{f} \quad \text{gdzie } \Phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \dots & \phi_m(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \dots & \phi_m(x_n) \end{bmatrix}$$

## Własności funkcji kształtu

$N_i(x_i, y_i) = 1, \quad N_i(x_j, y_j) = 0$  dla  $i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n,$  gdzie  $n$  – liczba węzłów

Funkcje bazowe w ES trójwęzłowym  $\Phi = [1, x, y]$  a w czterowęzłowym  $\Phi = [1, x, y, xy]$

## Przemieszczenia PSO

$$\mathbf{u}^e(x, y) = \mathbf{N}^e(x, y) \bar{\mathbf{d}}^e \quad \text{gdzie } \mathbf{u}^e(x, y) = \{u^e(x, y), v^e(x, y)\}, \quad \mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & \dots & N_n^e & 0 \\ 0 & N_1^e & \dots & 0 & N_n^e \end{bmatrix}$$

## Odształcenia PSO: $\varepsilon_z = 0$

$$\mathbf{e}^e(x, y) = \mathbf{L}\mathbf{u}^e(x, y) = \mathbf{B}^e(x, y) \bar{\mathbf{d}}^e \quad \text{gdzie } \mathbf{B}^e(x, y) = \mathbf{L}\mathbf{N}^e(x, y)$$

$$\mathbf{e}^e(x, y) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^e(x, y) \\ \varepsilon_y^e(x, y) \\ \gamma_{xy}^e(x, y) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

## Naprężenia PSO: $\sigma_z^e = \nu(\sigma_x^e + \sigma_y^e)$

$$\mathbf{s}^e(x, y) = \mathbf{D}\mathbf{e}^e(x, y) \quad \text{gdzie } \mathbf{s}^e(x, y) = \begin{bmatrix} \sigma_x^e(x, y) \\ \sigma_y^e(x, y) \\ \tau_{xy}^e(x, y) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

### Macierz sztywności i wektor sił brzegowych (zastępniki) PSO

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \int_{A^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA^e, \quad \bar{\mathbf{f}}_b^e = \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{t}^e d\Gamma^e \quad \text{gdzie } \mathbf{t}^e = \begin{bmatrix} t_x^e \\ t_y^e \end{bmatrix}$$

### Własności funkcji kształtu

$N_i(x_i, y_i) = 1, \quad N_i(x_j, y_j) = 0 \quad \text{dla } i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n,$  gdzie  $n$  – liczba węzłów

Funkcje bazowe w ES trójwęzłowym  $\Phi = [1, x, y]$  a w czterowęzłowym  $\Phi = [1, x, y, xy]$

### Temperatura

$$T^e(x, y) = \mathbf{N}^e(x, y) \Theta^e \quad \text{gdzie } \mathbf{N}^e = [N_1^e \quad \dots \quad N_n^e]$$

### Gęstość strumienia ciepła

$$\mathbf{q}^e(x, y) = -\mathbf{D} \nabla T^e(x, y) = -\mathbf{D} \mathbf{B}^e(x, y) \Theta^e \quad \text{gdzie } \mathbf{B}^e(x, y) = \nabla \mathbf{N}^e(x, y)$$

$$\mathbf{q}^e(x, y) = \begin{bmatrix} q_x(x, y) \\ q_y(x, y) \end{bmatrix}, \quad \nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}$$

### Macierz przewodności i wektor gęstości strumienia na brzegu (zastępniki)

$$\mathbf{k}^e = \int_{A^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} h^e dA^e, \quad \mathbf{f}_b^e = - \int_{\Gamma^e} (\mathbf{N}^e(x, y))^T q_n h^e d\Gamma^e$$

### Rozwinięcie w szereg Taylora

- dla 1D:  $u_j = u_i + hu'_i + \frac{1}{2}h^2u''_i + \frac{1}{6}h^3u'''_i + \dots + \frac{1}{n!}h^nu_i^{(n)} + \dots$  gdzie  $h = x_j - x_i$
- dla 2D:  $u_{lm} = u_{ij} + h \frac{\partial u_{ij}}{\partial x} + k \frac{\partial u_{ij}}{\partial y} + \frac{1}{2}h^2 \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x^2} + hk \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}k^2 \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial y^2} + \dots + \frac{1}{n!} \left( \frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^n u_{ij} + \dots$  gdzie  $h = x_l - x_i, k = y_m - y_j$

### Wzory różnicowe - klasyczny MRS

- Pierwsza pochodna centralna  $\left\{ \begin{array}{c} \text{---} (-1) \text{---} h \text{---} \textcircled{0} \text{---} h \text{---} (1) \text{---} \end{array} \right\} \cdot \frac{1}{2h}$

- Druga pochodna  $\left\{ \begin{array}{c} \text{---} (1) \text{---} h \text{---} \textcircled{-2} \text{---} h \text{---} (1) \text{---} \end{array} \right\} \cdot \frac{1}{h^2}$

- Laplasjan  $\left\{ \begin{array}{c} \text{---} (1) \text{---} \\ | \\ \text{---} (1) \text{---} h \text{---} \textcircled{-4} \text{---} h \text{---} (1) \text{---} \\ | \\ \text{---} (1) \text{---} \end{array} \right\} \cdot \frac{1}{h^2}$

## Aproksymacja MWLS 1D

- Aproksymacja lokalna

$$J = \sum_{s=0}^m \sum_{j=1}^{n_s} \left[ \left( \sum_{i=s}^p \frac{h_j^{i-s}}{(i-s)!} u_0^{(i)} - \bar{u}_j^{(s)} \right)^2 \left( \frac{1}{h_j^{1+p-s}} \right)^2 \right]$$

gdzie:  $p$  – stopień aproksymacji;  $j$  – numer węzła dla którego zastosowano rozwinięcie w szereg Taylora;  $s$  – typ uogólnionego stopnia swobody, np.  $s = 0 \Rightarrow u_j, s = 1 \Rightarrow u'_j$ ;  $m$  – liczba typów uogólnionych stopniów swobody, np.  $m = 0 \Rightarrow u_j; m = 1 \Rightarrow u_j, u'_j$ ;  $n_s = [n_0, n_1, \dots, n_m]$  – liczba stopni

swobody danego typu, np.  $u_1, u'_1 \quad u_0 \quad u_2$   
 $\circ \text{---} \ominus \text{---} \circ \quad n_0 = 2, n_1 = 1$

- Minimalizacja funkcji błędu

$u_0^{(t)} = \frac{d^t u}{dx^t}$  – poszukiwane pochodne  $t$  w węźle/punkcie  $x_0$

**Macierz transformacji** ( $c = \cos(\alpha^e)$  i  $s = \sin(\alpha^e)$ ) **oraz macierz sztywności dla elementu ramowego**

$$\mathbf{T}^e = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}^e = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}^e$$

**Macierz wstępnych naprężeń oraz macierz mas dla elementu ramowego**

$$\mathbf{k}_\sigma^e = \frac{N^e(x)}{30l^e} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3l & 0 & -36 & 3l \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & -3l & -l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3l & 0 & 36 & -3l \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix}^e, \quad \mathbf{m}^e = \frac{\mu l}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 156 & -22l \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}^e$$

**Funkcje kształtu dla czterowęzłowego elementu oraz jacobian odwzorowania**

$$\begin{aligned} N_i(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_j(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_k(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_l(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned}, \quad J = \left\| \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \right\|$$

**Sformułowanie silne - model lokalny**

$$Ay''(x) + C(x)y(x) = D(x)$$

+ (przykładowe) warunki brzegowe

- $y(x_a) = \hat{a}$  – podstawowy warunek brzegowy (Dirichleta)
- $y'(x_b) = \hat{b}$  – naturalny warunek brzegowy (Neumanna)

**Sformułowanie słabe – model globalny** ( $\forall w \neq 0$ )

$$\int_{x_a}^{x_b} w(x) \left( Ay^{h''}(x) + C(x)y^h(x) - D(x) \right) dx = 0$$

$$\int_{x_a}^{x_b} w(x) Ay^{h''}(x) dx + \int_{x_a}^{x_b} w(x) C(x) y^h(x) dx - \int_{x_a}^{x_b} w(x) D(x) dx = 0$$

$$w(x) Ay^{h'}(x) \Big|_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} w'(x) Ay^{h'}(x) dx + \int_{x_a}^{x_b} w(x) C(x) y^h(x) dx - \int_{x_a}^{x_b} w(x) D(x) dx = 0$$

$$w(x_b) A \hat{b} - w(x_a) Ay^{h'}(x_a) - \int_{x_a}^{x_b} w'(x) Ay^{h'}(x) dx + \int_{x_a}^{x_b} w(x) C(x) y^h(x) dx - \int_{x_a}^{x_b} w(x) D(x) dx = 0$$

$$w(x_b) A \hat{b} - w(x_a) Ay^{h'}(x_a) - \int_{x_a}^{x_b} w'(x) Ay^{h'}(x) dx + \int_{x_a}^{x_b} w(x) C(x) y^h(x) dx - \int_{x_a}^{x_b} w(x) D(x) dx = 0$$

$$L(y^h, w) - l(w) = 0$$

+ podstawowy warunek brzegowy

- $y(x_a) = \hat{a}$

**Estymator błędu**

$$e^e(x^e) = |y_{h,p}^e(x^e) - y_{por}^e(x^e)|$$

gdzie  $e$  – element,  $y_{h,p}^e$  – rozwiązanie MES,  $h$  – moduł siatki,  $p$  – rząd aproksymacji  $y_{por}^e$  – rozwiązanie ściśle lub odniesienia.

**Wskaźnik (indykator) błędu**

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{|I|} \sum_e L(e, e)}$$

**Liniowe funkcje kształtu 1D**

$$N^e = \left[ 1 - \frac{x^e}{l^e} \quad \frac{x^e}{l^e} \right]$$

**Kwadratowe hierarchiczne funkcje kształtu 1D**

$$N^e = \left[ 1 - \frac{x^e}{l^e} \quad \frac{x^e}{l^e} \quad x^e(x^e - l^e) \right]$$