Metoda gradientów sprzężonych

Przykład

$$F=(x-1)^2+\frac{1}{4}y^2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}x-1 & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-1\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\overset{\equiv A}{\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}}-\overset{\equiv b^t}{\begin{bmatrix}2 & 0\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\overset{\equiv c}{1}=\frac{1}{2}x^tAx-b^tx+c$$

$$\nabla f=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}=Ax-b \quad , \quad x_0=\begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix}$$

$$h_0=g_0=-\nabla f_0=-\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\lambda_0=\frac{g_0^tg_0}{g_0^tAg_0}=\frac{\begin{bmatrix}-2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}-2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}}=\frac{10}{17}$$

$$g_1=g_0-\lambda_0Ah_0=\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}-\frac{10}{17}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}=\frac{6}{17}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

lub

$$x_1=x_0+\lambda_0h_0=\begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix}+\frac{10}{17}\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}=\frac{2}{17}\begin{bmatrix}7\\ -12\end{bmatrix}$$

sprawdzenie

$$g_1=-\nabla f_1=-\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\frac{2}{17}\begin{bmatrix}7\\ -12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}=\frac{6}{17}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\gamma_0=\frac{g_1^tAh_0}{h_0^tAh_0}=\frac{\frac{6}{17}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}-2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}}=-\frac{36}{289}$$

lub

$$\gamma_0 = -\frac{g_1^t g_1}{g_0^t g_0} = \frac{\frac{6}{17}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\frac{6}{17}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}-2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}} = -\frac{36}{289}$$

$$h_1 = g_1 - \gamma_0 h_0 = \frac{6}{17}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + \frac{36}{289}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} = \frac{30}{289}\begin{bmatrix}1\\8\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \frac{g_1^t g_1}{g_1^t A h_1} = \frac{\frac{6}{17}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\frac{6}{17}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}{\frac{6}{17}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\frac{30}{289}\begin{bmatrix}1\\8\end{bmatrix}} = \frac{17}{10}$$

lub

$$\lambda_1 = \frac{g_1^t h_1}{h_1^t A h_1} = \frac{\frac{6}{17}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\frac{30}{289}\begin{bmatrix}1\\8\end{bmatrix}}{\frac{30}{289}\begin{bmatrix}1 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\frac{30}{289}\begin{bmatrix}1\\8\end{bmatrix}} = \frac{17}{10}$$

$$g_2 = g_1 - \lambda_1 A h_1 = \frac{6}{17}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - \frac{17}{10}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\frac{30}{289}\begin{bmatrix}1\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$x_2 = x_1 + \lambda_1 h_1 = \frac{2}{17}\begin{bmatrix}7\\-12\end{bmatrix} + \frac{17}{10}\frac{30}{289}\begin{bmatrix}1\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

sprawdzenie

$$g_2 = -\nabla f_2 = -\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Interpretacja geometryczna