Metody komputerowe

Dane: pręt o długości L, module Younga E, polu powierzchni przekroju A, i sile skupionej ściskającej P, przyłożonej na swobodnym końcu, nieliniowe prawo fizyczne wg wzoru $\sigma = E\varepsilon^2$, interpolacja hierarchiczna w jednym elemencie skończonym, za pomocą 3 funkcji kształtu

Szukane: pierwsze przybliżenie rozwiązania $u^{(1)}$

Przyjmuję: L = h = 1, P = -10 kN, E = 10^6 kN/m2, A = 10^-2 m

Rozwiązanie:
- funkcje kształtu w elemencie i ich pochodne

$$N = \begin{bmatrix} 1-x & x & x(x-1) \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2x-1 \end{bmatrix}$$

- rozwiązanie startowe $u^{(0)}$ (na podstawie wykładu) dla równania liniowego

$$Ku^{(0)} = F$$

$$EA\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \to \quad 10^4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \to \quad u^{(0)} = -10^{-3}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} m$$

- równanie nieliniowe

$$EA\int_0^L v'(u')^2\, dx = Pv(L)$$

- równanie nieliniowe MES

$$K(u) = F \quad \to \quad R(u) = K(u) - F$$

$$K(u) = EA\int_0^L B^T (Bu)^2\, dx \quad , \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix}$$

- macierz styczna

$$K_T(u) = \frac{\partial}{\partial u} R(u) = 2EA\int_0^L B^T B(Bu)\, dx$$

- obliczenia

$$K_T\left(u^{(0)}\right) = 2\cdot 10^4 \int_0^1 B^T B\left(-10^{-3}\right) dx = -2\cdot 10 \int_0^1 B^T B\, dx = -20\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$R\left(u^{(0)}\right)=2\cdot10^4\int_0^1 B^T\left(-10^{-3}\right)^2 dx-\begin{bmatrix}0\\-10\\0\end{bmatrix}=2\cdot10^{-2}\int_0^1\begin{bmatrix}-1\\1\\2x-1\end{bmatrix}dx+\begin{bmatrix}0\\10\\0\end{bmatrix}=2\cdot10^{-2}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\10\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.02\\9.98\\0\end{bmatrix}$$

- układ równań metody N-R

$$K_T\left(u^{(0)}\right)\Delta u^{(1)}=-R\left(u^{(0)}\right)$$

$$-20\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta u_1\\\Delta u_2\\\Delta\alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.02\\-9.98\\0\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad-20\begin{bmatrix}1&0\\0&1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta u_2\\\Delta\alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9.98\\0\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\Delta u^{(1)}=0.499\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}m$$

- pierwsze przybliżenie rozwiązania

$$u^{(1)}=u^{(0)}+\Delta u^{(1)}=0.498\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}m$$

Matematyka 2

Dane: obszar prostokątny a x b, na brzegach zadanie warunki podstawowe, w obszarze zadanie równanie eliptyczne II rzędu

Szukane: aproksymacja rozwiązania i jego pierwszych pochodnych za pomocą podwójnych szeregów trygonometrycznych

Przyjmuję: a = 2, b = 1, równanie: $\frac{\partial^2 u}{dx^2}+\frac{\partial^2 u}{dy^2}=1$, warunki brzegowe $u=0$ na całym brzegu

Rozwiązanie:
- aproksymacja prawej strony równania (po jednej fali sinusa na każdy kierunek, pierwsza częstość)

$$f(x,y)=f_{1,1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{1}\right)$$

$$f_{1,1}=\frac{4}{2\cdot1}\int_0^2\int_0^1 1\cdot\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{1}\right)dydx=2\cdot\frac{4}{\pi}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{16}{\pi^2}$$

$$f(x,y)=\frac{16}{\pi^2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{1}\right)$$

- aproksymacja rozwiązania i pochodne z równania

$$u(x,y) = u_{1,1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{1}\right)$$
$$\frac{\partial^2 u}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{4} u_{1,1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{1}\right)$$
$$\frac{\partial^2 u}{dy^2} = -\pi^2 u_{1,1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{1}\right)$$
$$\frac{\partial^2 u}{dx^2} + \frac{\partial^2 u}{dy^2} = u_{1,1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{1}\right)\left(-\frac{\pi^2}{4} - \pi^2\right)$$

- spełnienie równania eliptycznego

$$u_{1,1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{1}\right)\left(-\frac{\pi^2}{4} - \pi^2\right) = \frac{16}{\pi^2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{1}\right)$$

stąd

$$u_{1,1} = \frac{16}{\pi^2}\left(-\frac{\pi^2}{4} - \pi^2\right)^{-1} = -\frac{16}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2 + 4\pi^2}{4}\right)^{-1} = -\frac{16}{\pi^2}\cdot\frac{4}{5\pi^2} = -\frac{64}{5\pi^4}$$

- końcowe rozwiązanie i jego pochodne

$$u(x,y) = -\frac{64}{5\pi^4}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{1}\right)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{32}{5\pi^3}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{1}\right)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{64}{5\pi^3}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{1}\right)$$