

Zadanie 1. Oblicz, stosując metodę potęgową, największą wartość własną i odpowiadający jej wektor własny dla danej macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

przyjmując wektor startowy $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 0, 0)^T$ i dokładność $\epsilon = 0.1$.

Odpowiedź:

Krok I dla $k = 0$.

1. Przyjmujemy wektor startowy: $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 0, 0)^T$.
2. Dokonujemy normalizacji:

$$\mathbf{v}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} / \left([1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Wykonujemy krok potęgowy:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{v}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Obliczamy wartość własną z ilorazu Rayleigha:

$$\rho_1 = (\mathbf{v}^{(0)})^T \mathbf{x}^{(1)} = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

Po wykonaniu pierwszego kroku nie badamy zbieżności iteracji.

Krok II dla $k = 1$.

2. Dokonujemy normalizacji:

$$\mathbf{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} / \left([1 \ -2 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \cong \begin{bmatrix} 0.447 \\ -0.894 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Wykonujemy krok potęgowy:

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{A}\mathbf{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -10 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \cong \begin{bmatrix} 1.342 \\ -4.472 \\ 0.894 \end{bmatrix}$$

4. Obliczamy wartość własną z ilorazu Rayleigha:

$$\rho_2 = (\mathbf{v}^{(1)})^T \mathbf{x}^{(2)} = [1 \ -2 \ 0] \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 3 \\ -10 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{23}{5} = 4.6$$

Odpowiedź:

(c.d.)

5. Badamy zbieżność iteracji: $\epsilon_2^{(\lambda)} = \left| \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \right| = \left| \frac{3.6}{4.6} \right| \cong 0.78$

W celu obliczenia $\epsilon_2^{(x)}$ musimy wcześniej dokonać normalizacji $\mathbf{v}^{(2)}$.

$$\mathbf{v}^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -10 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} / \left(\begin{bmatrix} 3 & -10 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 3 \\ -10 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -10 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{113}} \cong \begin{bmatrix} 0.282 \\ -0.941 \\ 0.188 \end{bmatrix}$$

Korzystając z normy średniokwadratowej:

$$\epsilon_2^{(x)} = \|\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{v}^{(1)}\| \cong \|(-0.165, -0.047, 0.188)^T\| \cong 0.255$$

6. $\epsilon_2 > \epsilon$, więc nie spełnia żądanej dokładności. Przechodzimy do kolejnego kroku iteracji.

Krok III dla $k = 2$.

2. Normalizacja $\mathbf{v}^{(2)}$ została wykonana w p. 5. kroku II.

3. Wykonujemy krok potęgowy:

$$\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{A}\mathbf{v}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -10 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{113}} = \begin{bmatrix} 13 \\ -50 \\ 12 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{113}} \cong \begin{bmatrix} 1.222 \\ -4.704 \\ 1.129 \end{bmatrix}$$

4. Obliczamy wartość własną z ilorazu Rayleigha:

$$\rho_3 = (\mathbf{v}^{(2)})^T \mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 & -10 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{113}} \begin{bmatrix} 13 \\ -50 \\ 12 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{113}} = \frac{563}{113} \cong 4.982$$

5. Badamy zbieżność iteracji: $\epsilon_3^{(\lambda)} = \left| \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_3} \right| = \left| \frac{0.382}{4.982} \right| \cong 0.077$

W celu obliczenia $\epsilon_3^{(x)}$ musimy wcześniej dokonać normalizacji $\mathbf{v}^{(3)}$.

$$\mathbf{v}^{(3)} = \begin{bmatrix} 13 \\ -50 \\ 12 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{113}} / \left(\begin{bmatrix} 13 & -50 & 12 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{113}} \begin{bmatrix} 13 \\ -50 \\ 12 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{113}} \right)^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 13 \\ -50 \\ 12 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2813}} \cong \begin{bmatrix} 0.245 \\ -0.943 \\ 0.226 \end{bmatrix}$$

Korzystając z normy średniokwadratowej:

$$\epsilon_3^{(x)} = \|\mathbf{v}^{(3)} - \mathbf{v}^{(2)}\| \cong \|(-0.037, -0.002, 0.038)^T\| \cong 0.053$$

6. Ponieważ $\epsilon_3 < \epsilon$, zatem spełniona jest żądana dokładność.

7. Przyjmujemy, że $\lambda_1 = \rho_3$ i $\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}^{(3)}$.

Zadanie 2. Zastosować twierdzenie Gerszgorina dla zlokalizowania wartości własnych macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Odpowiedź:

Oznaczmy $s_i = a_{ii}$.

$s_1 = 1$, $R_1 = 0 + 0 = 0$, czyli $K_1(1, 0)$

$s_2 = 0$, $R_2 = |-1| + |1| = 2$, $K_2(0, 2)$

$s_3 = 2$, $R_3 = |-1| + |-1| = 2$, $K_3(2, 2)$

$$K = \bigcup_i K_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{czyli} \quad K \in [-2, 4]$$

Zadanie 3. Dana jest macierz:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Znaleźć przybliżoną wartość własną wykonując 2 kroki iteracji metodą potęgową.

b) Znaleźć przybliżoną wartość własną wykonując 2 kroki metodą iteracji odwrotnej.

Przyjąć wektor startowy $(0, 1, 0)^T$.

Odpowiedź:

a) **Krok I** dla $k = 0$

$$\rho_1 = 3, \quad \mathbf{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}}$$

Krok II dla $k = 1$

$$\rho_2 = 5.5, \quad \mathbf{v}^{(2)} = \begin{bmatrix} -9 \\ 14 \\ -13 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{446}}$$

Przyjmujemy, że $\lambda_1 = \rho_2$.

b) **Krok I** dla $k = 0$.

1. Przyjmujemy wektor startowy: $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 0)^T$.

2. Dokonujemy normalizacji: $\mathbf{v}^{(0)} = (0, 1, 0)^T$.

3. Wykonujemy krok potęgowy:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}^{(0)} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 11 & 7 \\ -1 & 7 & 11 \end{bmatrix} \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix} \frac{1}{18}$$

4. Obliczamy wartość własną z ilorazu Rayleigha:

$$\rho_1 = (\mathbf{v}^{(0)})^T \mathbf{x}^{(1)} = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix} \frac{1}{18} = \frac{11}{18} \cong 0.611$$

Krok II dla $k = 1$.

2. Dokonujemy normalizacji: $\mathbf{v}^{(1)} = (1, 11, 7)^T \frac{1}{\sqrt{171}}$

3. Wykonujemy krok potęgowy: $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}^{(1)} = (1, 19, 17)^T \frac{1}{2\sqrt{171}}$

4. Obliczamy wartość własną z ilorazu Rayleigha:

$$\rho_2 = (\mathbf{v}^{(1)})^T \mathbf{x}^{(2)} = [1 \quad 11 \quad 7] \frac{1}{\sqrt{171}} \begin{bmatrix} 1 \\ 19 \\ 17 \end{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{171}} = \frac{329}{342} = 0.962$$

Punkt 5. i 6. pomijamy.

7. Przyjmujemy, że $\lambda_3 = \frac{1}{\rho_2} = 1.04$.

Zadanie 4. Wykonaj trzy pierwsze iteracje metody potęgowej dla macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

przyjmując $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 0, 0)^T$. Zadanie powtórz dla metody iteracji odwrotnej.

Zadanie 5.

Dany jest uogólniony problem własny $\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{B} \mathbf{x}$, gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 0.5 \\ -1 & 0.5 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 1.5 & -0.5 \\ 0.25 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}.$$

Sprowadzić ten problem do postaci standardowej. Obliczyć metodą potęgową dominującą wartość własną oraz odpowiadający jej wektor własny \mathbf{x} . Wykonać 4 kroki iteracji.

Zadanie 6. Dla poniższej macierzy oblicz minimalną wartość własną i odpowiadający jej wektor własny wykonując dwie pierwsze iteracje.

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Przyjmij wektor startowy $x^{(0)} = [3.0, 4.0]^T$.

Zadanie 7. Dla poniższej macierzy oblicz wartość własną λ najbliższą liczbie 1.0 oraz odpowiadający jej wektor własny. Wykonaj dwie pierwsze iteracje, przyjmując wektor startowy $x^{(0)} = [1.0, 0.0]^T$.

$$\begin{bmatrix} 2.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.5 \end{bmatrix}$$
