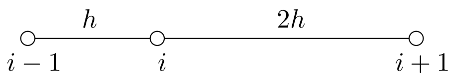
Zadanie 1. Wyprowadzić wzór różnicowy do obliczenia pochodnej w punkcie i (patrz rysunek)



a następnie policzyć pochodną $f'(0.4)$ dla danych $f(0.2) = 5.2,\ f(0.4) = 5.3,\ f(0.8) = 5.1$

Odpowiedź:

1. Wyprowadzenie wzoru różnicowego

   - Sposób I - z wykorzystaniem szeregu Taylora

$$f_{i-1} = f_i - hf_i' + \frac{1}{2}h^2 f_i'' + \cdots$$
$$f_{i+1} = f_i + 2hf_i' + \frac{1}{2}(2h)^2 f_i'' + \cdots$$

po przemnożeniu pierwszego równania przez -4 a następnie dodaniu do siebie dwóch równań otrzymano:

$$f_{i+1} - 4f_{i-1} = -3f_i + 6hf_i'$$

co ostatecznie daje wzór:

$$f_i' = \frac{f_{i+1} + 3f_i - 4f_{i-1}}{6h}$$

   - Sposób II - z wykorzystaniem interpolacji Lagrange'a
     wzór interpolacyjny Lagrange'a

$$f(x) \approx \bar{f}(x) = f(x_{i-1}) \cdot \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} + \\ + f(x_i) \cdot \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} + f(x_{i+1}) \cdot \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)}$$

stąd :

$$\bar{f}(x) = f_{i-1} \cdot \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{-h \cdot -3h} + f_i \cdot \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{h \cdot -2h} + f_{i+1} \cdot \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{3h \cdot 2h}$$

natomiast pochodna wynosi:

$$\bar{f}'(x) = f_{i-1} \cdot \frac{2x - (x_i + x_{i+1})}{3h^2} + f_i \cdot \frac{2x - (x_{i-1} + x_{i+1})}{-2h^2} + f_{i+1} \cdot \frac{2x - (x_{i-1} + x_i)}{6h^2}$$

a dla $x = x_i$

$$f_i' \approx \bar{f}'(x_i) = f_{i-1} \cdot \frac{-2h}{3h^2} + f_i \cdot \frac{-h}{-2h^2} + f_{i+1} \cdot \frac{h}{6h^2}$$

czyli:

$$f_i' = \frac{f_{i+1} + 3f_i - 4f_{i-1}}{6h}$$

Odpowiedź:

2. Obliczenie pochodnej

   $h = 0.2$

$$f'(0.4) = \frac{f(0.8) + 3f(0.4) - 4f(0.2)}{6 \cdot 0.2}$$
$$\boldsymbol{f'(0.4)} = \frac{5.1 + 3 \cdot 5.3 - 4 \cdot 5.2}{1.2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$$

Zadanie 2. Obliczyć pierwszą i drugą pochodną funkcji $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$ w punkcie $x = 3$ wykorzystując wzory różnicowe dla równoodległych węzłów x_{i-1}, x_i, x_{i+1}. Przyjąć $h = 0.2$

Odpowiedź:

1. Policzenie pierwszej pochodnej

$$\boldsymbol{f'(3)} = f_0' = \frac{f_1 - f_{-1}}{2 \cdot h} = \frac{f(3+0.2) - f(3-0.2)}{0.4} =$$
$$= \frac{f(3.2) - f(2.8)}{0.4} = \frac{28.32 - 21.92}{0.4} = \mathbf{16}$$

2. Policzenie drugiej pochodnej

$$\boldsymbol{f''(3)} = f_0'' = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} = \frac{f(3+0.2) - 2f(3) + f(3-0.2)}{0.04} =$$
$$= \frac{f(3.2) - 2f(3) + f(2.8)}{0.04} = \frac{28.32 - 2 \cdot 25 + 21.92}{0.04} = \mathbf{6}$$

Zadanie 3. Dla gwiazdy różnicowej podanej w **zadaniu 1** wyprowadzić wzór różnicowy dla drugiej pochodnej.

Zadanie 4. Dla dowolnie wybranej funkcji $f(x)$ obliczyć w wybranym punkcie x_0 pierwszą i drugą pochodną funkcji wykorzystując wzory wyprowadzone na wykładzie.

Zadanie 5. Za pomocą wzorów różnicowych znaleźć f'(0.5) a następnie f"(0.5) dla poniższych danych:

x	0.4	0.6
f(x)	1.2	1.5
f'(x)	0.8	?

Zadanie 6. Niech $f(x) = 2^x \sin(x)$. Znajdź f'(1.05) stosując krok $h = 0.05$ oraz $h = 0.01$ i "różnice centralne" korzystając z poniższych danych:

x	1.0	1.04	1.06	1.10
f(x)	1.6829420	1.7732994	1.8188014	1.9103448
