

**Zadanie 1.** Rozwiązać metodą Eulera podany problem początkowy:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2y^2, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0; 0, 2]. \quad \text{Przyjąć } h = 0, 1.$$

*Odpowiedź:*

Przy rozwiązywaniu danego problemu początkowego metodą Eulera wykorzystuje się następującą formułę iteracyjną:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

W niniejszym zadaniu funkcja  $f(x_k, y_k)$  ma postać:

$$f(x_k, y_k) = 3x_k^2 - 2y_k^2.$$

Obliczenia rozpoczynamy wykorzystując warunek początkowy  $y(x_0) = y_0$ , czyli  $y(0) = 1$ . W pierwszym kroku iteracyjnym ( $k = 0$ ) obliczamy  $y_1$  w punkcie  $x_1 = x_0 + h$ :

$$\begin{aligned} y_{0+1} &= y_0 + h \cdot (3x_0^2 - 2y_0^2), \text{ czyli} \\ y_1 &= 1 + 0, 1 \cdot (3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 1^2) = 0, 8. \end{aligned}$$

W drugim kroku iteracyjnym ( $k = 1$ ) obliczamy  $y_2$  w punkcie  $x_2 = x_1 + h$  korzystając z obliczonego powyżej  $y_1 = 0, 8$  i przyjmując  $x_1 = x_0 + h = 0, 1$ :

$$y_2 = y_1 + h \cdot (3x_1^2 - 2y_1^2) = 0, 675.$$

Rozwiązaniem powyższego problemu początkowego jest funkcja  $y(x)$ , spełniająca warunek początkowy  $y(0) = 1$  i określona w punktach  $x_1 = 0, 1$  i  $x_2 = 0, 2$ , gdzie odpowiednio  $y_1 = 0, 8$  i  $y_2 = 0, 675$ .

---

**Zadanie 2.** Rozwiązać metodą Eulera podany problem początkowy:

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2 - 3y^2, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0; 0, 2]. \quad \text{Przyjąć } h = 0, 1.$$

*Odpowiedź:*

Rozwiązaniem powyższego problemu początkowego jest funkcja  $y(x)$ , spełniająca warunek początkowy  $y(0) = 1$  i określona w punktach  $x_1 = 0, 1$  i  $x_2 = 0, 2$ , gdzie odpowiednio  $y_1 = 0, 7$  i  $y_2 = 0, 555$ .

---

**Zadanie 3.** Rozwiązać metodą Eulera poniższe problemy początkowe:

- a)  $y' = t^2, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0, \quad h = 0, 25,$
  - b)  $y' = t \cdot y, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 1, \quad h = 0, 25,$
  - c)  $y' = 2 \cdot t, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 1, \quad h = 0, 25,$
  - d)  $y' = -t \cdot y, \quad 0 \leq t \leq 4, \quad y(0) = 1, \quad h = 1, 00.$
-

**Zadanie 4.** Rozwiązać problem początkowy z zadania 1. metodą Runge-Kutty II rzędu. Przyjąć  $h = 0,1$ .

*Odpowiedź:*

Przy rozwiązywaniu danego problemu początkowego metodą R-K II rz. wykorzystuje się następującą formułę rekurencyjną (iteracyjną):

$$y_{k+1} = y_k + 0,5 \cdot (k_1 + k_2), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

gdzie:  $k_1 = h \cdot f(x_k, y_k)$ ,  $k_2 = h \cdot f(x_k + h, y_k + k_1)$ .

Dla  $k = 0$ , korzystając z warunku początkowego obliczamy  $k_1$ :

$$k_1 = h \cdot (3x_0^2 - 2y_0^2) = -0,2.$$

Następnie obliczamy  $k_2$ :

$$k_2 = h \cdot (3(x_0 + h)^2 - 2(y_0 + k_1)^2) = -0,125.$$

Oraz ostatecznie  $y_1$  w punkcie  $x_1 = 0,1$ :

$$y_1 = y_0 + 0,5 \cdot (k_1 + k_2) = 0,8375$$

W drugim kroku iteracyjnym ( $k = 1$ ) obliczamy  $y_2$  w punkcie  $x_2 = 0,2$ :

$$y_2 = y_1 + 0,5 \cdot (k_1 + k_2) = 0,8375 + 0,5(-0,137 + (-0,086)) = 0,726$$

Otrzymane rozwiązanie różni się nieco od rozwiązania otrzymanego za pomocą metody Eulera.

---

**Zadanie 5.** Rozwiązać problem początkowy z zadania 2. metodą Runge-Kutty II rzędu. Przyjąć  $h = 0,1$ .

*Odpowiedź:*

$$y_1 = 0,7775, \quad y_2 = 0,6382$$

---

**Zadanie 6.** Rozwiązać problemy początkowe z zadania 3. metodą Runge-Kutty II rzędu.

---

**Zadanie 7.** Rozwiązać metodą Eulera oraz metodą R-K II rz. podany układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= 3u_1(t) + 2u_2(t), & 0 \leq t \leq 1, & \quad u_1(0) = 0, \\ u_2'(t) &= 4u_1(t) + u_2(t), & 0 \leq t \leq 1, & \quad u_2(0) = 1. \end{aligned}$$

Przyjąć  $h = 0,50$ . Otrzymane wyniki porównać z rozwiązaniem dokładnym:

$$u_1(t) = \frac{1}{3}(e^{5t} - e^t), \quad u_2(t) = \frac{1}{3}(e^{5t} - 2e^t).$$

---

**Zadanie 8.** Rozwiązać problemy początkowe z zadania 3. metodą Runge-Kutty IV rzędu.

---