

Zadanie 1. Sprawdzić, czy wielomian $H(x) = -x^4 + 2x^2$ jest wielomianem Hermite'a dla funkcji $f(x) = x^2e^{1-x^2}$ przy wyborze następujących węzłów: $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Wskazówka: $(e^{ax})' = ae^{ax}$.

Zadanie 2. Stosując interpolację Hermite'a obliczyć $f(2.5)$ dla

x	$f(x)$	$f'(x)$
2.2	0.5208	-0.001488
2.6	0.4813	-0.1884

Zadanie 3. Dla funkcji $f(x) = 3xe^x - e^{2x}$ obliczyć $f(1.03)$ za pomocą wzoru interpolacyjnego Hermite'a stopnia 3, przyjmując punkty węzłowe $x_0 = 1$ i $x_1 = 1.05$. Oszacować błąd interpolacji.

Zadanie 4. Dla funkcji $f(x) = 3xe^x - e^{2x}$ obliczyć $f(1.03)$ za pomocą wzoru interpolacyjnego Hermite'a stopnia 5, przyjmując punkty węzłowe $x_0 = 1.0$, $x_1 = 1.05$, $x_2 = 1.07$.

Zadanie 5. Wyznaczyć wielomian interpolacyjny Hermite'a oraz policzyć $\sin(0.34)$ dla danych

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0.30	0.2955	0.9553
0.32	0.3146	0.9492
0.35	0.3429	0.9394

Oszacować błąd interpolacji.

Zadanie 6. Na podstawie danej tablicy pomiarów prędkości ruszającego samochodu:

i	0	1	2	3
$t[s]$	0	5	10	15
$V(t)[m/s]$	0	3.5	12	28.5

a) wyznacz postać funkcji prędkości stosując odpowiednie wielomiany bazowe Lagrange'a.

b) Ile wynosi prędkość dla $t = 8$ s ?

Zadanie 7. Obliczyć wartość $\sqrt{1.17}$ mając daną tablicę:

x	1.1	1.15	1.2
\sqrt{x}	1.0488	1.0724	1.0954

i stosując

a) interpolację liniową

b) interpolację Lagrange'a, z wykorzystaniem wszystkich węzłów

Zadanie 8. Znaleźć wielomian interpolacyjny, który w punktach -2, 1, 2, 4 przyjmuje wartości odpowiednio 3, 1, -3, 8.

Zadanie 9. Znaleźć wielomian Lagrange'a $L_2^3(x)$ dla funkcji o stabelaryzowanych rzędnych i narysować jego schematyczny wykres.

i	0	1	2	3
x	0	1	2	3
y	0	1	4	1

Zadanie 10. Wyznaczyć wielomiany interpolacyjne Lagrange'a stopnia 1, 2, 3 i 4 i obliczyć $f(2.5)$ jeśli:

$$\begin{aligned} f(2) &= 0.5104 \\ f(2.2) &= 0.5208 \\ f(2.4) &= 0.5104 \\ f(2.6) &= 0.4813 \\ f(2.8) &= 0.4359 \end{aligned}$$

Zadanie 11. Dla danych:

$$\begin{aligned} f(1.00) &= 0.1924 & f(1.05) &= 0.2414 \\ f(1.10) &= 0.2933 & f(1.15) &= 0.3492 \end{aligned}$$

wyznaczyć wielomian interpolacyjny Lagrange'a stopnia 3 dla obliczenia $f(1.09)$. Interpolowaną funkcją jest $f(x) = \log_{10} \tan(x)$. Oszacować błąd interpolacji.

Zadanie 12. Dla danych:

$$\begin{aligned} f(1.0) &= 1.00000 & f(1.2) &= 1.55271 & f(1.4) &= 2.61170 \\ f(1.1) &= 1.23368 & f(1.3) &= 1.99327 \end{aligned}$$

wyznaczyć wielomian interpolacyjny Lagrange'a stopnia 4 dla obliczenia $f(1.25)$. Interpolowaną funkcją jest $f(x) = e^{x^2-1}$. Oszacować błąd interpolacji.

Zadanie 13. Znaleźć wielomian Lagrange'a $L_1^3(x)$ dla stabelaryzowanej funkcji i narysować jego wykres.

i	0	1	2	3
x	-2	0	1	2
y	3	-1	1	5

Odpowiedź:

$$\begin{aligned} L_1^3(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ L_1^3(x) &= \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{4} \end{aligned}$$

Zadanie 14. Dla danych wartości:

$$\begin{aligned} \sin(0.30) &= 0.29552 \\ \sin(0.32) &= 0.31457 \\ \sin(0.35) &= 0.34290 \end{aligned}$$

wyznaczyć wielomian interpolacyjny Lagrange'a stopnia 2 lub niższego. Obliczyć $\sin(0.34)$ oraz oszacować błąd interpolacji.

Zadanie 15. Korzystając z węzłów $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$, $x_2 = 4$ znaleźć wielomian interpolacyjny dla funkcji $f(x) = 1/x$.

Odpowiedź:

$$L_0(x) = \frac{(x - 2.5)(x - 4)}{(2 - 2.5)(2 - 4)} = x^2 - 6.5x + 10 ,$$

$$L_1(x) = \frac{(x - 2)(x - 4)}{(2.5 - 2)(2.5 - 4)} = \frac{1}{3}(-4x^2 + 24x - 32) ,$$

$$L_2(x) = \frac{(x - 2)(x - 2.5)}{(4 - 2)(4 - 2.5)} = \frac{1}{3}(x^2 - 4.5x + 5) .$$

Obliczając wartości funkcji:

$$f(x_0) = f(2) = 0.5 ,$$

$$f(x_1) = f(2.5) = 0.4 ,$$

$$f(x_2) = f(4) = 0.25 ,$$

dostajemy

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=0}^2 f(x_k)L_k(x) \\ &= 0.5(x^2 - 6.5x + 10) + \frac{0.4}{3}(-4x^2 + 24x - 32) \\ &\quad + \frac{0.25}{3}(x^2 - 4.5x + 5) \\ &= 0.05x^2 - 0.425x + 1.15 \end{aligned}$$
