Elementy geometrii różniczkowej – krzywe

Wszystkie zadanie zaczerpnięto z książki: Bogusław Gdowski, "Elementy geometrii różniczkowej z zadaniami", PWN, 1982.

1. Znaleźć naturalne przedstawienie parametryczne następujących krzywych przyjmując $s = 0$ dla $t = 0$:

   a) $\mathbf{r} = [3t, 4t], \quad t \geq 0,$

   b) $\mathbf{r} = [t, a\cosh\left(\frac{t}{a}\right)], \quad t \geq 0,$

   c) $\mathbf{r} = [\cos^3(t), \sin^3(t), \cos(2t)], \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$

2. Znaleźć równanie stycznej i normalnej do krzywej:

   a) $x = t^3 - 2t,\ y = t^2 + 1$ w punkcie $t = 1$;

   b) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a \neq 0$, w punkcie $(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2})$;

   c) $\rho = 2a\cos(\theta)$, $a > 0$, w punkcie $\theta = \frac{\pi}{4}$.

3. Znaleźć równanie stycznej do asteroidy $\mathbf{r} = [a\cos^3(t), a\sin^3(t)]$ najbardziej oddalonej od początku układu.

4. Znaleźć równanie płaszczyzny normalnej do krzywej $\mathbf{r} = [2\cos(t), 2\sin(t), 4t]$ w punkcie $t = 0$.

5. Znaleźć równanie prostej stycznej i płaszczyzny normalnej do krzywej o równaniach $x^2 - 2z = 0, \quad y^2 - 2z = 0$ w punkcie $P(2, 2, 2)$

6. Znaleźć równanie płaszczyzny normalnej do krzywej o równanich $x^2 + y^2 - z^2 = 1, \quad x^2 - y^2 - z^2 = 1$ w dowolnym punkcie tej krzywej.

7. Znaleźć krzywiznę krzywej:

   a) $y = \ln x$ w punkcie $(1, 0)$;

   b) $x^3 + y^3 = 3axy$ w punkcie $(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a)$.

8. Znaleźć krzywiznę w dowolnym punkcie krzywej:

   a) $y = \sin(x)$;

   b) $y^2 = 2px$;

   c) $x = t^2,\ y = t^3$;

   d) $x = a(t - \sin(t)),\ y = a(1 - \cos(t))$;

   e) $\rho = a(1 + \cos(\theta))$

9. Znaleźć rownanie płaszczyzny ściśle stycznej spirali stożkowej $\mathbf{r} = [t\cos(t), -t\sin(t), at]$ w punkcie $t = 0$.

10. Znaleźć rownanie płaszczyzny ściśle stycznej krzywej $\mathbf{r} = [a\cos(t), b\sin(t), e^t]$ w punkcie $t = 0$.

11. Znaleźć rownanie płaszczyzny ściśle stycznej krzywej $\mathbf{r} = [\cos^3(t), \sin^3(t), \cos(2t)]$ w dowolnym punkcie tej krzywej.

12. Znaleźć rownanie płaszczyzny ściśle stycznej krzywej powstałej z przekroju sfery $x^2+y^2+z^2 = 9$ i walca hiperboloicznego $x^2 - y^2 = 3$ w punkcie P(2,1,2) tej krzywej

13. Znaleźć równanie normalnej głównej i binormalnej krzywej:

    a) $\mathbf{r} = [t, t^2, t^3]$ w punkcie $t = 1$;

    b) $x = y^2,\ x^2 = z$ w punkcie $P(1, 1, 1)$;

    c) $xy = z^2,\ x^2 + y^2 - z^2 = 1$ w punkcie $P(1, 1, 1)$.