Zadanie 1. Stosując wzór sumacyjny Simpsona dla przedziału całkowania podzielonego na $k = 3$ podprzedziały obliczyć całke:

$$I = \int_{-3}^{3} (x^3 + 2x)dx$$

Odpowiedź:
Całkę można policzyć dwoma sposobami:

- I. Korzystamy z ogólnego wzoru Simpsona:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}\left[f_0 + f_n + 2\left(f_2 + f_4 + \cdots + f_{n-2}\right) + 4\left(f_1 + f_3 + \cdots + f_{n-1}\right)\right].$$

Mamy zatem:
$I = \frac{h}{6}\left[f(-3) + f(3) + 2(f(-1) + f(1)) + 4(f(-2) + f(0) + f(2))\right] =$
$= \frac{2}{6}\left[-33 + 33 + 2 \cdot (-3 + 3) + 4 \cdot (-12 + 0 + 12)\right] = 0$

- II. Korzystamy ze wzoru Simpsona obliczając sumę trzech całek:

$$I = \int_{-3}^{-1} (x^3 + 2x)dx + \int_{-1}^{1} (x^3 + 2x)dx + \int_{1}^{3} (x^3 + 2x)dx.$$

Stąd: $I = \frac{2}{6}\left[-33 + 4 \cdot (-12) - 3\right] + \frac{2}{6}\left[-3 + 4 \cdot 0 + 3\right] + \frac{2}{6}\left[3 + 4 \cdot 12 + 33\right] = 0$

Uwaga: $h = x_{i+2} - x_i$, gdzie $i = 0, 2, 4$.

Zadanie 2. Oblicz całki (bez podziału na podprzedziały):

$$I = \int_1^3 \left(x^2 - 3x + 5\right) dx\,,$$

a) metodą prostokątów środkowych, b) metodą trapezów, c) metodą Simpsona.

Zadanie 3. Stosując wzory Newtona–Cotesa przy interpolacji wielomianem 3-go stopnia, obliczyć całkę:

$$I = \int_{-1}^{2} (-8x^3 + 4x^2 + 20x + 8)dx$$

Odpowiedź:
Dla stopnia $n = 3$:
$h = \frac{2-(-1)}{3} = 1,$
$x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2,$
$f_0 = 8 + 4 - 20 + 8 = 0, \quad f_1 = 8, \quad f_2 = -8 + 4 + 20 + 8 = 24, \quad f_3 = -64 + 16 + 40 + 8 = 0.$
Korzystając ze wzoru Newtona–Cotesa dla $n = 3$ otrzymujemy:

$$I = 3 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 8 + \frac{3}{8} \cdot 24 + \frac{1}{8} \cdot 0\right) = 36$$

Zadanie 4. Obliczyć metodą prostokątów lewych, prawych, środkowych oraz trapezów całki (n – liczba podprzedziałów):

$$\int_1^3 \frac{dx}{x},\ n=4, \qquad \int_0^2 x^3 dx,\ n=4,$$
$$\int_0^3 x\sqrt{1+x^2}\,dx,\ n=6, \qquad \int_0^1 \sin\pi x\,dx,\ n=6,$$
$$\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx,\ n=8, \qquad \int_0^1 x^2e^x\,dx,\ n=8.$$

Dodatkowo obliczyć powyższe całki stosując metodę Simpsona oraz wzory Newtona–Cotesa (stopnia 3, 4, 5) dla $n = 1$.

Zadanie 5. Stosując trzypunktową kwadraturę Gaussa znaleźć wartość całki

$$I = \int_{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}^{\sqrt{5}+\sqrt{3}} (4x^4 - 2x^2)dx$$

Czy otrzymany wynik jest dokładny? Dla trzypunktowej kwadratury Gaussa węzły i wagi są następujące:
$\xi_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$ $w_0 = \frac{5}{9}$, $w_1 = \frac{8}{9}$, $w_2 = \frac{5}{9}$

Odpowiedź:
Stosując podstawienie

$$x = m\xi + n \quad \text{gdzie } m = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} = \sqrt{5}$$
$$n = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

sprowadzamy całkę w przedziale $\left\langle -\sqrt{5}+\sqrt{3}; \sqrt{5}+\sqrt{3}\right\rangle$ do całki w przedziale $\langle -1; 1\rangle$ Po zastosowaniu trzypunktowej kawadratury Gaussa do otrzymanej całki ostateczny rezultat wynosi

$$I = \sqrt{5}(\frac{5}{9}\cdot 0 + \frac{8}{9}\cdot 30 + \frac{5}{9}\cdot 522) = \frac{1000\sqrt{5}}{3} \quad .$$

Otrzymany wynik jest dokładny ponieważ trzypunktową kwadraturą Gaussa można całkować ściśle wielomiany do stopnia 5-go włącznie.

Zadanie 6. Obliczyć przybliżoną wartość całki : $\int_{-\sqrt{3}+1}^{\sqrt{3}+1} e^{x/2}\,(\sin x - 1)\,dx$ dwupunktową kwadraturą Gaussa. Wagi $w_i = 1.0$, współrzędne węzłów $xi_i = + - 1/\sqrt{3}$.

Zadanie 7. Obliczyć kwadraturą Gaussa całki, przyjmując $n = 2$ i $n = 3$:

$$\int_1^3 \frac{dx}{x}, \qquad \int_0^2 x^3dx, \qquad \int_0^3 x\sqrt{1+x^2}\,dx,$$
$$\int_0^1 \sin\pi x\,dx, \qquad \int_0^{2\pi} x\sin x\,dx, \qquad \int_0^1 x^2e^x\,dx.$$

Zadanie 8. Oblicz całki (bez podziału na podprzedziały):

$$I = \int_3^9 \left(x^2 - 12x + 36\right) dx\,,$$

a) metodą Simpsona,

b) metodą dwupunktową Gaussa.

c) Wyznacz błąd bezwzględny dla każdego z przypadków wiedząc, że dokładne wartości całek wynoszą: $I = 18.0$.

Odpowiedź:

a) Metoda Simpsona:

$$\int_3^9 \left(x^2 - 12x + 36\right) dx = \int_3^9 (x-6)^2\, dx = \frac{9-3}{6}\left((3-6)^2 + 4\cdot(6-6)^2 + (9-6)^2\right) = 18$$

b) Metoda Gaussa:

$$w_1 = w_2 = 1.0$$

$$x_1 = \frac{12}{2} - \frac{9-3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 6 - \sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{12}{2} + \frac{9-3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 6 + \sqrt{3}$$

$$f_1 = \left(\left(6 - \sqrt{3}\right) - 6\right)^2 = 3$$

$$f_2 = \left(\left(6 + \sqrt{3}\right) - 6\right)^2 = 3$$

$$\int_3^9 (x-6)^2\, dx = \frac{9-3}{2}(1\cdot 3 + 1\cdot 3) = 18$$

c) Błąd bezwzględny dla obu metod wynosi:

$$\Delta_I = \mid \widetilde{I} - I \mid = 0$$