Zadanie 1. Rozwiąż problem brzegowy metodą różnicową:

$$y'' + 3xy = 9x^2 + 6x - 5, \quad x \in [0,1], \quad y(0) = -1, \quad y(1) = 2.$$

Przyjac krok $h = 1/3$.

Odpowiedź:
Korzystając ze wzoru na drugą pochodną

$$y_i'' = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2},$$

otrzymujemy:

$$\begin{cases} \dfrac{y_0 - 2y_1 + y_2}{(\frac{1}{3})^2} + 3\frac{1}{3}y_1 = 9(\frac{1}{3})^2 + 6\frac{1}{3} - 5 \\ \dfrac{y_1 - 2y_2 + y_3}{(\frac{1}{3})^2} + 3\frac{2}{3}y_2 = 9(\frac{2}{3})^2 + 6\frac{2}{3} - 5 \end{cases}$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych $y_0 = -1$ i $y_3 = 2$ równanie przyjmie postać

$$\begin{cases} -17y_1 + 9y_2 = 7 \\ 9y_1 - 16y_2 = -15 \end{cases}$$

Stąd $y_1 = y(1/3) = 0.1204$ oraz $y_2 = y(2/3) = 1.0052$

Zadanie 2. Metodą różnic skończonych rozwiązać problem brzegowy:

$$y'' + (1 + x^2)y = -1 \qquad y = y(x)$$
$$y(-1) = y(1) = 0$$

Przyjąć podział przedziału $[-1, 1]$ na cztery części ($h = 0.5$).
Wskazówka: W celu uproszczenia obliczeń można skorzystać z symetrii rozwiązania, tzn. $y(x) = y(-x)$.

Zadanie 3. Problem brzegowy:

$$y'' = y' + 2y + \cos x\,, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\,,$$
$$y(0) = -0.3\,, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.1$$

ma rozwiązanie:

$$y\,(x) = -\frac{1}{10}\,(\sin x + 3\cos x)\ .$$

Zastosować metodę różnic skończonych dla otrzymania rozwiązania przybliżonego i porównać wyniki z rozwiązaniem dokładnym. Przyjąć:

$$h = \frac{\pi}{4}\,, \quad h = \frac{\pi}{6}\,.$$

Zadanie 4. Metodą różnic skończonych rozwiąż następujące zadania:

a) $y'' + y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad y(0) = 1,\ y(\pi) = -1, \quad h = \pi/3;$

b) $y'' + 4y = \cos(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/4, \quad y(0) = 0,\ y(\pi/4) = 0; \quad h = \pi/12;$

c) $y'' = -4y' + 4y, \quad 0 \leqslant x \leqslant 5, \quad y(0) = 1,\ y(5) = 0, \quad h = 0.2;$

Zadanie 5. Metodą różnic skończonych rozwiąż zadanie:

$$\begin{aligned} y'' &= -(x+1)y' + 2y + (1-x^2)e^{-x}, \\ &\qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad h = 0.1 \end{aligned}$$

i porównaj wyniki z rozwiązaniem ścisłym $y = (x-1)e^{-x}$.

Zadanie 6. Znaleźć rozwiązanie zagadnienia brzegowego

$$\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dx^2} - y = 2x - 1 \ , \\ &y(0) = 0 \qquad y(8) = 0 \qquad h = 2\ . \end{aligned}$$

metodą różnic skończonych.
